# ریاضی ۳ — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۷

۱- نامعادله مقابل را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

$$\frac{|2x-1|}{3} < 1$$

۲- در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ مقادیر $a,b,c$ را طوری بیابید که تابع ، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کند و $f(1)=6$ و نمودار تابع از نقطه $(-1,10)$ نیز بگذرد.

۳- دامنه تعریف تابع $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|}$ را بدست آورید.

۴- الف) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x^2}$ باشد ، دامنه $\frac{f}{g}(x)$ را بدست آورید.

ب) اگر $f(x)=\frac{x}{1+x}$ و $f\left(g(x)\right)$ باشد ، ضابطه $g(x)$ را بدست آورید.

۵- هر یک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-|x|}{[x+1]-x}$ ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\tan 3x}{1-\cos 2x}$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x}}$ هـ) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3-4x+3}{(x-1)^2}$ و) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x-1}{\cos x+\sin^2 x}$

۶- آیا تابع $f(x)=\sqrt{x-3}$ وقتی $x\to 3$ دارای حد است؟ چرا؟

۷- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} 3x+\frac{|2x|}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0\end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

۸- فاصله پیوستگی تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-2x^2}$ را بدست آورید.

۹- آهنگ تغییرات تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ وقتی $x$ از ۲ به ۲/۲ تغییر کند را بدست آورید.

۱۰- مشتق‌های تابع‌های زیر را بدست آورید. ( ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x}$ ب) $g(x)=5\sin^2(x-1)-\cot\sqrt{x}$ ج) $h(x)=(x^3-x)^3(2x-1)$

۱۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=2\sin x-1$ را در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{6}$ واقع بر این منحنی بدست آورید.

۱۲- مقادیر $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=x^3+ax^2+b$ محور $x$ ها را در نقطه‌ای به طول $(-1)$ قطع کند و نقطه عطفی به طول $(1)$ داشته باشد.

۱۳- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=(2-x)(x+1)^2$ را رسم کنید.

# پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۷

۱-

$|۲x-۱|<۳ \Rightarrow -۳<۲x-۱<۳ \Rightarrow -۱<x<۲ \Rightarrow x\in(-۱,۲)$

۲-

$(۰,۵)\Rightarrow f(x)=ax^۲+bx+c \Rightarrow ۵=a(۰)^۲+b(۰)+c \Rightarrow ۵=c$

$(۱,۶)\Rightarrow f(x)=ax^۲+bx+c \Rightarrow ۶=a(۱)^۲+b(۱)+c \Rightarrow a+b+۵=۶$

$(-۱,۱۰)\Rightarrow f(x)=ax^۲+bx+c \Rightarrow ۱۰=a(-۱)^۲+b(-۱)+c \Rightarrow ۱۰=a-b+۵$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۱ \\ a-b=۵ \end{cases} \Rightarrow ۲a=۶ \Rightarrow a=۳, b=-۲ \qquad \begin{matrix} a+b+۵=۶ \\ a-b+۵=۱۰ \end{matrix}$

۳-

| x | $-\infty$ | | $-۲$ | | $۲$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $-$ | |

$۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow (۲-x)(۲+x)\geq ۰$

$|x|\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰ \Rightarrow R-\{۰\} \qquad \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$D=(۱)\cap(۲)-\{۰\} \Rightarrow \{x|-۲\leq x<۰\}\cup\{x|۰\leq x\leq ۲\}$

۴-

$D_f: x\geq ۰, D_g: x\neq ۰$

الف) $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\} \Rightarrow \{x|x>۰\}-\{۱\} \qquad g(x)=۰ \Rightarrow \frac{x-۱}{x^۲}=۰ \Rightarrow \begin{matrix} x-۱=۰ \\ x=۱ \end{matrix}$

ب) $f(g(x))=\frac{g(x)}{۱+g(x)}=\frac{۱}{x} \Rightarrow x(g(x))=۱+g(x) \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x-۱}$

۵-

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{(۳+\sqrt{۲x+۱})(۲+\sqrt{x})}{(۳+\sqrt{۲x+۱})(۲+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۹-۲x-۱)(۲+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۲(۴-x)(۲+\sqrt{x})}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x-(-x)}{[x]+۱-x}=\frac{۲x}{-۱+۱-x}=\frac{۲x}{-x}=-۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\frac{۲x\tan ۳x}{x^۲}}{\frac{۲\sin^۲ x}{x^۲}}=\frac{۲x\times ۳x}{۲x^۲}=\frac{۶x^۲}{۲x^۲}=۳$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۲x}{\sqrt{۳x^۲}}=\frac{۲x}{|x|\sqrt{۳}}=\frac{۲x}{x\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{(x^۲+x-۳)(x-۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{x^۲+x-۳}{x-۱}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$

و) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{۲\sin x-۱}{\cos x+\sin^۲ x}=\frac{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱}{\frac{۱}{۲}+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\frac{۵}{۴}}$

۶- تابع در نقطه ۳ حد ندارد. چون حد چپ وجود ندارد.

$\lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{x-۳}=$ وجود ندارد $\qquad D: x-۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۳ \quad \lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{x-۳}=۰$

۷-

$\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=f(۰)$ شرط پیوستگی $\qquad \lim\limits_{x\to ۰^-}\left(۳x+\frac{-۲x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to ۰^-}۳x-۲=-۲$

$f(۰)=۲ \quad \lim\limits_{x\to ۰^+}\left(۳x+\frac{۲x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to ۰^+}۳x+۲=۲$ تابع پیوسته نیست

۸-

$$x^{۳} - ۲x = ۰ \Rightarrow x^{۲}(x-۲) = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۰ , x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ , x = ۲$$

فاصله پیوستگی: $(-\infty , ۰) \cup (۰,۲) \cup (۲, +\infty)$

-۹

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(۲/۲) - f(۲)}{۲/۲ - ۲} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲/۲)^{۲} - \frac{۱}{۲}(۲)^{۲}}{۰/۲} = \frac{۰/۴۲}{۰/۲} = ۲/۱$$

-۱۰

الف) $f'(x) = \dfrac{۲x - ۴}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲} - ۴x)^{۳-۱}}} = \dfrac{۲x - ۴}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲} - ۴x)^{۲}}}$

ب) $g'(x) = ۲ \times ۵ Cos(x-۱) Sin(x-۱) + \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱ + Cot^{۲}\sqrt{x})$

ج) $h'(x) = ۳(x^{۳} - x)^{۲}(۳x^{۲} - ۱)(۲x - ۱) + ۲(x^{۳} - x)^{۳}$

-۱۱

$x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow y = ۲Sin\frac{\pi}{۶} - ۱ = ۰ \qquad x_{۱} = \frac{\pi}{۶} , y_{۱} = ۰ \qquad Sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$

$y' = ۲Cos\, x \Rightarrow m = ۲Cos\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$

$y - y_{۱} = m(x - x_{۱})$

$y = \sqrt{۳}(x - \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - \frac{\sqrt{۳}\pi}{۶}$

-۱۲

$(-۱,۰) \in f \Rightarrow ۰ = -۱ + a + b \Rightarrow a + b = ۱$

$f'(x) = ۳x^{۲} + ۲ax \, , \, f''(x) = ۶x + ۲a \Rightarrow ۶(۱) + ۲a = ۰ \Rightarrow a = -۳$

$a = -۳ \Rightarrow a + b = ۱ \Rightarrow -۳ + b = ۱ \Rightarrow b = ۴$

$a + b = ۱ \Rightarrow b = ۴$

-۱۳

$$y' = -(x+۱)^{۲} + ۲(x+۱)(۲-x) = \begin{cases} y' = ۰ \\ -۳x^{۲} + ۳ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \, , \, y = ۴ \\ x = -۱ , y = ۰ \end{cases}$$

$$y'' = -۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y'' = ۰ \\ x = ۰ \, , \, y = ۲ \end{cases}$$

| x | $-\infty$ | | $-۲$ | | $-۱$ | | ۰ | | ۱ | | ۲ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | | $-$ | | ۰ | | $+$ | | ۰ | | $-$ | | |
| y | $+\infty$ | ↘ | ۴ | ↘ | ۰ | ↗ | ۲ | ↗ | ۴ | ↘ | ۰ | ↘ | $-\infty$ |
| | | | | | min | | | | max | | | | |